

**ПАЁМИ**  
**ДОНИШГОҶИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН**  
**Бахши илмҳои табиӣ**  
**2019. № 2.**

---

**ВЕСТНИК**  
**ТАДЖИКСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА**  
**Серия естественных наук**  
**2019. № 2.**

---

**BULLETIN**  
**OF THE TAJIK NATIONAL UNIVERSITY**  
**Series of natural sciences**  
**2019. No. 2.**

---



МАРКАЗИ  
ТАБЪУ НАШР, БАҶГАРДОН ВА ТАРҶУМА  
ДУШАНБЕ – 2019

**ПАЁМИ ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН  
БАХШИ ИЛМҲОИ ТАБИЙ**

**Муассиси маҷалла:**

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон  
Маҷалла соли 2012 таъсис дода шудааст.  
Дар як сол 4 шумора нашр мегардад.

**Сармуҳаррир:**

<b>Имомзода Муҳаммадқосуф Сайдалӣ</b>	Доктори илмҳои филологӣ, профессор, академики Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон, ректори Донишгоҳи миллии Тоҷикистон
<b>Муовини сармуҳаррир:</b>	
<b>Сафармамадов Сафармамад Муборакшоевич</b>	Доктори илмҳои химия, профессор, муовини ректор онд ба илми Донишгоҳи миллии Тоҷикистон
<b>Муовини сармуҳаррир:</b>	
<b>Сафарализода Хучамурод Қуддусӣ</b>	Номзади илмҳои сиёсӣ, дотсент, директори Маркази таъбу нашр, баргардон ва тарҷумаи Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

**ҲАЙАТИ ТАҲРИРИЯ**

**01.01.01 – Математика**

<b>Раҷабов Нусрат Раҷабович</b>	Доктори илмҳои физикаю математика, профессор
<b>Ҷангибеков Гулҷоҷа</b>	Доктори илмҳои физикаю математика
<b>Мустафоқулов Раҳмонқул</b>	Доктори илмҳои физикаю математика, профессор
<b>Шерматов Нурмаҳмад</b>	Доктори илмҳои техникӣ, профессор
<b>Сатторов Абдуманон</b>	Доктори илмҳои физикаю математика, профессор

**01.04.00 – Физика**

<b>Двинин Сергей Александрович</b>	Доктори илмҳои физикаю математика, дотсент
<b>Солиҳов Давлат Қуватович</b>	Доктори илмҳои физикаю математика, профессор
<b>Махсудов Барот Исломович</b>	Доктори илмҳои физикаю математика, профессор
<b>Рашидов Ҷалил Рашидович</b>	Доктори илмҳои физикаю математика, профессор
<b>Абдуллоев Хасан Муминҷонович</b>	Доктори илмҳои физикаю математика, профессор
<b>Комилов Қосим</b>	Доктори илмҳои физикаю математика, профессор
<b>Султонов Низом Султонович</b>	Доктори илмҳои физикаю математика, профессор

**02.00.00 – Илмҳои кимиё**

<b>Дегтев Михаил Иванович</b>	Доктори илмҳои химия, профессор
<b>Ҷураев Тухтасун Ҷураевич</b>	Доктори илмҳои химия, профессор
<b>Солиев Лутфулло</b>	Доктори илмҳои химия, профессор
<b>Мурзубраимов Бектемир Мурзубраимович</b>	Доктори илмҳои химия, профессор
<b>Кустов Андрей Владимирович</b>	Доктори илмҳои химия, профессор
<b>Холиқов Ширинбек Холиқович</b>	Доктори илмҳои химия, профессор
<b>Суяров Курбонхон Ҷураевич</b>	Номзади илмҳои химия, дотсент

Маҷалла ба Феҳристи нашрияҳои илмӣ тақризшавандан Комиссияи олии аттестатсионии Федератсияи Русия аз 03.06.2016 ворид гардидааст.

Маҷалла мақолаҳои илмӣ соҳаҳои зерини илмро барои ҷоп қабул менамояд:  
**01.01.00 – Математика; 01.04.00 – Физика;  
02.00.00 – Илмҳои кимиё;**

Маҷалла дар Индекси иқтибосҳои илмӣ Русия (РИНЦ) ворид карда шудааст ва пайвасти дар системаи индексатсионии мазкур дар боран шумораҳои ҷопшуда маълумот ворид менамояд.

Маҷалла сомонӣ расмӣ худро дорад, ки дар он матнӣ муқаммалӣ маводи ҷойи ҷойгир карда шудааст ([www.vestnik-tnu.com](http://www.vestnik-tnu.com)).

**Паёми Донишгоҳи миллии Тоҷикистон.  
Бахши илмҳои табиӣ**

– 2019. – №2.

ISSN 2413-452X

Маҷалла дар Вазорати фарҳанги Ҷумҳурии Тоҷикистон № 0039/ЖР-97 аз 17.01.2018 ба қайд гирифта шудааст.  
Маҷалла дар Маркази таъбу нашр, баргардон ва тарҷумаи ДМТ барои нашр таҳия мегардад. Нишонии Марказ:  
734025, Ҷумҳурии Тоҷикистон,  
ш. Душанбе, хиёбони Рӯдакӣ, 17.  
Сомонаи маҷалла: [www.vestnik-tnu.com](http://www.vestnik-tnu.com)  
E-mail: [vestnik-tnu@mail.ru](mailto:vestnik-tnu@mail.ru)  
Тел.: (+992 37) 227-74-41

**ВЕСТНИК ТАДЖИКСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА  
СЕРИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК**

**Учредитель журнала:**  
Таджикский национальный университет  
**Журнал основан в 2012 г. Выходит 4 раз в год.**

**Главный редактор журнала:**

**Имомзода Мухаммадюсуф Сайдали** | Доктор филологических наук, профессор, академик Академии наук Республики Таджикистан, ректор Таджикского национального университета (Душанбе, Таджикистан)

**Заместитель главного редактора:**

**Сафармамадов Сафармамад Муборакшоевич** | Доктор химических наук, профессор, проректор по науке Таджикского национального университета (Душанбе, Таджикистан)

**Заместитель главного редактора:**

**Сафарализода Худжамурод Куддуси** | Кандидат политических наук, доцент, директор Издательского центра Таджикского национального университета

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:**

**01.01.00 – Математика**

<b>Раджабов Нусрат Раджабович</b>	Доктор физико-математических наук, профессор, академик АН РТ
<b>Джангибеков Гулходжа</b>	Доктор физико-математических наук, профессор
<b>Мустафокулов Рахмонкул</b>	Доктор физико-математических наук, профессор
<b>Шерматов Нурмахмад</b>	Доктор технических наук, профессор
<b>Сатторов Абдуманон</b>	Доктор физико-математических наук, профессор

**01.04.00 – Физика**

<b>Двинин Сергей Александрович</b>	Доктор физико-математических наук, доцент
<b>Солихов Давлат Куватович</b>	Доктор физико-математических наук, профессор
<b>Махсудов Барот Исломович</b>	Доктор физико-математических наук, профессор
<b>Рашидов Джалил Рашидович</b>	Доктор физико-математических наук, профессор
<b>Абдуллоев Хасан Муминджанович</b>	Доктор физико-математических наук, профессор
<b>Комилов Косим</b>	Доктор физико-математических наук, профессор
<b>Султонов Низом Султонович</b>	Доктор физико-математических наук, профессор

**02.00.00 – Химические науки**

<b>Дегтев Михаил Иванович</b>	Доктор химических наук, профессор
<b>Джураев Тухтасун Джураевич</b>	Доктор химических наук, профессор
<b>Солиев Лутфулло</b>	Доктор химических наук, профессор
<b>Мурзубраимов Бектемир Мурзубраимович</b>	Доктор химических наук, профессор
<b>Кустов Андрей Владимирович</b>	Доктор химических наук, профессор
<b>Халиков Ширинбек Халикович</b>	Доктор химических наук, профессор
<b>Суяров Курбонхон Джураевич</b>	Кандидат химических наук, доцент

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки Российской Федерации от 03.06.2016.

Журнал принимает научные статьи по следующим отраслям науки: **01.01.00 – Математика; 01.04.00 – Физика; 02.00.00 – Химические науки.**

Журнал включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), регулярно предоставляет в РИНЦ информацию в виде метаданных.

Журнал имеет официальный сайт ([www.vestnik-tnu.com](http://www.vestnik-tnu.com)), в котором размещаются полнотекстовые версии опубликованных материалов.

**Вестник Таджикского национального университета.  
Серия естественных наук.  
– 2019. – №2.  
ISSN 2413-452X**

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры Республики Таджикистан. Свидетельство №0039/ЖР-97, от 17.01.2018

**Журнал подготавливается к изданию в Издательском центре ТНУ.**

**Адрес Издательского центра:**  
734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, проспект Рудаки, 17.  
Сайт журнала: [www.vestnik-tnu.com](http://www.vestnik-tnu.com)  
E-mail: [vestnik-tnu@mail.ru](mailto:vestnik-tnu@mail.ru)  
Тел.: (+992 37) 227-74-41

## О РЕШЕНИЯХ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

В статье рассматривается линейная однородная система дифференциальных уравнений первого порядка. Исследуется вопрос об отсутствии нетривиальных решений систем в пространстве суммируемых функций. Приведены условия, при выполнении которых, система не имеет ненулевых решений, принадлежащих пространству суммируемых функций.

Путём замены независимой переменной, искомая система сводится к системе с «почти постоянными коэффициентами». Сначала рассматривается частный случай системы, которая в зависимости от расположения спектра матрицы-коэффициентов распадается на две независимые системы.

Для общей системы поведение решений на бесконечности определяется расположением спектра заданной постоянной матрицы. Существенным условием для постоянной матрицы является то, что её спектр не должен пересекаться с мнимой осью.

Полученные результаты используются при исследовании вопроса о разрешимости линейных неоднородных систем дифференциальных уравнений в пространстве суммируемых функций.

**Ключевые слова:** система дифференциальных уравнений, однородная система, пространство суммируемых функций, интегральное уравнение, лемма Гронуолла, спектр матрицы, собственные числа, постоянная матрица.

## ON SOLVING A HOMOGENEOUS SYSTEM OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS IN SPACES OF SUMMARIZING FUNCTIONS

The article deals with a linear homogeneous system of first order differential equations. It is investigated the question of the absence of nontrivial solutions of systems in the space of summable functions. The conditions under which the system has no nontrivial solutions belonging to the space of summable functions are given.

By replacing the independent variable, the reviewed system is reduced to a system with "almost constant coefficients." Firstly, it is consider the private case of the system. In this case the current system depending on the location of the spectrum of the matrix - the coefficients are divided into two independent systems.

For a general system, the behavior of solutions at infinity is determined by the location of the spectrum of a given constant matrix. The essential condition for the constant matrix is that that spectrum should not intersect with the imaginary axis.

The obtained results are used during the research of problem of the solvability of linear inhomogeneous systems of differential equations in the space of summable functions.

**Key words:** system of differential equations, homogeneous system, space of summable functions, integral equation, Gronwall lemma, matrix spectrum, eigenvalues.

**Сведения об авторе:** *Гуломнабиев Сардор Гуломнадарович* - Политехнический институт Таджикского технического университета имени М. Осими, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики и информатики. **Адрес:** 735700, Республика Таджикистан, г. Худжанд, улица Ленина, 226. E-mail: [sardor1967@list.ru](mailto:sardor1967@list.ru). Телефон: 938-47-90-40

**Information about author:** *Gulomnabiev Sardor Gulomnadarovich* - Polytechnic Institute of the Tajik Technical University named after M. Osimi, candidate of physical and mathematical sciences, head of the department of higher mathematics and computer science. **Address:** 735700, Republic of Tajikistan, Khujand, Lenin street, 226. E-mail: [sardor1967@list.ru](mailto:sardor1967@list.ru). Phone: 938-47-90-40

УДК 517.927.4

## ОБ АПРИОРНОЙ ОЦЕНКЕ И СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ \*

*Кобилзода М. М., Наимов А. Н.*

Научно-исследовательского института Таджикского национального университета,  
Вологодский государственный университет

**1. Введение.** В статье исследован вопрос об априорной оценке и существовании периодических решений для систем обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида

$$x'(t) = F(t, x(t), y(t)), \quad y'(t) = G(t, x(t), y(t)), \quad x, y, t \in R. \quad (1)$$

Здесь  $R = (-\infty, +\infty)$  – вещественная ось, функции  $F(t, x, y)$  и  $G(t, x, y)$  предполагаются заданными, непрерывными по совокупности переменных  $(t, x, y) \in R^3$  и  $\omega$ -периодичными по  $t$ .

Вопрос о существовании периодических решений для систем обыкновенных дифференциальных уравнений исследован во многих работах. Отметим лишь работы [1, 2], где

\*Работа частично поддержана грантом РФФИ 18-47-350001 p\_a

рассмотрены системы линейных уравнений с ограниченными коэффициентами, и работы [3, 4, с.100], где рассмотрены системы нелинейных уравнений. В этих работах для исследования существования периодических решений применяются методы априорной оценки и методы вычисления вращения векторных полей.

В настоящей работе найдены новые условия на функции  $F(t, x, y)$  и  $G(t, x, y)$  в виде односторонних оценок, которые обеспечивают априорную оценку не только периодических, но и всех ограниченных решений системы уравнений (1). При этом, в отличие от вышеуказанных работ, система уравнений (1) может быть линейной или нелинейной, и в нелинейном случае не ставятся никакие ограничения на порядок роста функций  $F(t, x, y)$  и  $G(t, x, y)$  при  $|x| + |y| \rightarrow \infty$ . В условиях априорной оценки доказано существование  $\omega$ -периодических решений системы уравнений (1), применяя методы вычисления вращения векторных полей [4, с.85]. Рассмотрены два примера систем уравнений вида (1), правые части которых удовлетворяют условиям априорной оценки и для которых существуют  $\omega$ -периодические решения.

На основе полученных результатов для систем уравнений вида (1) можно исследовать существование ограниченных, рекуррентных и почти периодических решений.

**2. Основные результаты.** Периодическим (ограниченным) решением системы уравнений (1) называем пару  $(x(t), y(t))$  функций  $x(t)$  и  $y(t)$ , определенных и непрерывно дифференцируемых на  $R = (-\infty, +\infty)$ ,  $\omega$ -периодичных (ограниченных) и удовлетворяющих уравнениям системы (1).

Априорную оценку и существование  $\omega$ -периодических решений системы уравнений (1) исследуем предполагая, что функции  $F(t, x, y)$  и  $G(t, x, y)$  непрерывны по совокупности переменных и удовлетворяют условиям

$$xF(t, x, y) \geq \alpha_1 x^2 - \beta_1 y^2 - \gamma_1, \quad yG(t, x, y) \leq -\alpha_2 y^2 + \beta_2 x^2 + \gamma_2 \quad (2)$$

при всех  $x, y, t \in R$  и некоторых фиксированных вещественных чисел  $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0, \gamma_1 \geq 0, \gamma_2 \geq 0$ . В условиях (2), в общем, нет ограничений на порядок роста функций  $F(t, x, y)$  и  $G(t, x, y)$  при  $|x| + |y| \rightarrow \infty$  и  $|t| \rightarrow \infty$ .

Введем банахово пространство  $E$  непрерывных и ограниченных на  $R = (-\infty, +\infty)$  функций  $w(t)$  с нормой

$$\|w\| = \sup_{t \in R} |w(t)|.$$

Следующие две теоремы составляют основной результат настоящей работы.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия (2) и условие

$$\max\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right) < 1. \quad (3)$$

Тогда для любого ограниченного на  $R = (-\infty, +\infty)$  решения системы уравнений (1) верна оценка

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 \leq M, \quad (4)$$

где

$$M = \left(1 - \max\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)\right)^{-1} \left(\frac{\gamma_1}{\alpha_1} + \frac{\gamma_2}{\alpha_2}\right).$$

Оценку (4) называем априорной. Заметим, что оценка (4) не зависит от ограниченного решения системы уравнений (1), а зависит лишь от вещественных чисел, присутствующих в условиях (2).

**Теорема 2.** Если выполнены условия (2), (3) и функции  $F(t, x, y)$  и  $G(t, x, y)$   $\omega$ -периодичны по  $t$ , то существует  $\omega$ -периодическое решение системы уравнений (1).

**3. Априорная оценка ограниченных решений.** Приведем доказательство теоремы 1.

Пусть  $(x(t), y(t))$  – ограниченное решение системы уравнений (1). Обе стороны первого уравнения системы (1) умножим на  $2x(t)$ , а второго уравнения на  $2y(t)$ :

$$(x^2(t))' = 2x(t)F(t, x(t), y(t)), \quad (y^2(t))' = 2y(t)G(t, x(t), y(t)).$$

Полученные равенства перепишем в следующем виде:

$$(x^2(t))' - 2\alpha_1 x^2(t) = f(t), \quad (y^2(t))' + 2\alpha_2 y^2(t) = g(t), \quad (5)$$

где

$$f(t) = 2(x(t)F(t, x(t), y(t)) - \alpha_1 x^2(t)),$$

$$g(t) = 2(y(t)G(t, x(t), y(t)) + \alpha_2 y^2(t)).$$

Решим уравнения (5) относительно неизвестных  $x^2(t)$  и  $y^2(t)$ :

$$x^2(t) = e^{2\alpha_1 t} \left( x^2(0) + \int_0^t e^{-2\alpha_1 s} f(s) ds \right),$$

$$y^2(t) = e^{-2\alpha_2 t} \left( y^2(0) + \int_0^t e^{2\alpha_2 s} g(s) ds \right).$$

Отсюда, в силу ограниченности функций  $x^2(t)$  и  $y^2(t)$ , выводим:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( x^2(0) + \int_0^t e^{-2\alpha_1 s} f(s) ds \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x^2(t) e^{-2\alpha_1 t} = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \left( y^2(0) + \int_0^t e^{2\alpha_2 s} g(s) ds \right) = \lim_{t \rightarrow -\infty} y^2(t) e^{2\alpha_2 t} = 0.$$

Следовательно, несобственные интегралы

$$\int_0^{+\infty} e^{-2\alpha_1 s} f(s) ds, \quad \int_{-\infty}^0 e^{2\alpha_2 s} g(s) ds$$

сходятся и имеют место равенства

$$x^2(0) = - \int_0^{+\infty} e^{-2\alpha_1 s} f(s) ds, \quad y^2(0) = \int_{-\infty}^0 e^{2\alpha_2 s} g(s) ds.$$

Подставляя эти значения в формулы общего решения, получим:

$$x^2(t) = - \int_t^{+\infty} e^{-2\alpha_1(s-t)} f(s) ds, \quad y^2(t) = \int_{-\infty}^t e^{-2\alpha_2(t-s)} g(s) ds. \quad (6)$$

Функции  $f(t)$  и  $g(t)$  в силу условия (2) удовлетворяют неравенствам

$$f(t) \geq -2(\beta_1 y^2(t) + \gamma_1), \quad g(t) \leq 2(\beta_2 x^2(t) + \gamma_2).$$

Учитывая это, из (6) выводим:

$$x^2(t) \leq 2 \int_t^{+\infty} (\beta_1 y^2(t) + \gamma_1) e^{-2\alpha_1(s-t)} ds \leq 2(\beta_1 \|y\|^2 + \gamma_1) \int_t^{+\infty} e^{-2\alpha_1(s-t)} ds,$$

$$y^2(t) \leq 2 \int_{-\infty}^t (\beta_2 x^2(t) + \gamma_2) e^{-2\alpha_2(t-s)} ds \leq 2(\beta_2 \|x\|^2 + \gamma_2) \int_{-\infty}^t e^{-2\alpha_2(t-s)} ds,$$

$$x^2(t) \leq \frac{\beta_1 \|y\|^2 + \gamma_1}{\alpha_1}, \quad y^2(t) \leq \frac{\beta_2 \|x\|^2 + \gamma_2}{\alpha_2}. \quad (7)$$

Так как неравенства (7) имеют место для любого  $t \in (-\infty, +\infty)$ , то из них следуют неравенства

$$\|x\|^2 \leq \frac{\beta_1 \|y\|^2 + \gamma_1}{\alpha_1}, \quad \|y\|^2 \leq \frac{\beta_2 \|x\|^2 + \gamma_2}{\alpha_2},$$

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 \leq \left( 1 - \max \left( \frac{\beta_1}{\alpha_1}, \frac{\beta_2}{\alpha_2} \right) \right)^{-1} \left( \frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \frac{\gamma_2}{\alpha_2} \right).$$

Теорема 1 доказана.

**4. Существование периодического решения.** Теперь докажем теорему 2. Пусть функции  $F(t, x, y)$  и  $G(t, x, y)$   $\omega$ -периодичны по  $t$ . Рассмотрим в банаховом пространстве  $E^2 = C([0, \omega]) \times C([0, \omega])$  с нормой

$$\|(x, y)\|^2 := \max_{0 \leq t \leq \omega} |x(t)|^2 + \max_{0 \leq t \leq \omega} |y(t)|^2$$

семейство вполне непрерывных векторных полей

$$\Phi_\lambda(x, y) = \begin{pmatrix} x(t) - x(\omega) - \int_0^t F_\lambda(s, x(s), y(s)) ds \\ y(t) - y(\omega) - \int_0^t G_\lambda(s, x(s), y(s)) ds \end{pmatrix}, \quad \lambda \in [0, 1],$$

где

$$F_\lambda(t, x, y) = (1 - \lambda)F(t, x, y) + \lambda\alpha_1 x,$$

$$G_\lambda(t, x, y) = (1 - \lambda)G(t, x, y) - \lambda\alpha_2 y.$$

Проверим справедливость двух лемм.

**Лемма 1.** Пара  $(x, y) \in E^2$  является  $\omega$ -периодическим решением системы уравнений

$$x'(t) = F_\lambda(t, x(t), y(t)), \quad y'(t) = G_\lambda(t, x(t), y(t)), \quad (8)$$

лишь в том случае, когда  $\Phi_\lambda(x, y) = 0$ .

Действительно, пусть  $\Phi_\lambda(x, y) = 0$ . Тогда имеем:

$$x(t) = x(\omega) + \int_0^t F_\lambda(s, x(s), y(s)) ds, \quad y(t) = y(\omega) + \int_0^t G_\lambda(s, x(s), y(s)) ds.$$

Дифференцируя эти равенства, получим систему уравнений (8), при этом  $x(0) = x(\omega)$ ,  $y(0) = y(\omega)$ .

Теперь, наоборот, предположим, что пара  $(x, y) \in E^2$  является  $\omega$ -периодическим решением системы уравнений (8). Интегрируя равенства (8) от 0 до  $t$ , и вместо  $x(0)$  и  $y(0)$  подставляя  $x(\omega)$  и  $y(\omega)$ , получим:

$$x(t) = x(\omega) + \int_0^t F_\lambda(s, x(s), y(s)) ds, \quad y(t) = y(\omega) + \int_0^t G_\lambda(s, x(s), y(s)) ds.$$

Следовательно,  $\Phi_\lambda(x, y) = 0$ .

**Лемма 2.** При каждом  $\lambda \in [0, 1]$  функции  $F_\lambda(t, x, y)$  и  $G_\lambda(t, x, y)$  удовлетворяют условиям (2).

Действительно, при каждом  $\lambda \in [0, 1]$  имеем:

$$\begin{aligned} xF_\lambda(t, x, y) &= (1 - \lambda)xF(t, x, y) + \lambda\alpha_1x^2 \geq (1 - \lambda)(\alpha_1x^2 - \beta_1y^2 - \gamma_1) + \lambda\alpha_1x^2 = \\ &= \alpha_1x^2 - (1 - \lambda)(\beta_1y^2 + \gamma_1) \geq \alpha_1x^2 - \beta_1y^2 - \gamma_1, \\ yG_\lambda(t, x, y) &\leq (1 - \lambda)(-\alpha_2y^2 + \beta_2x^2 + \gamma_2) - \lambda\alpha_2y^2 = \\ &= -\alpha_2y^2 + (1 - \lambda)(\beta_2x^2 + \gamma_2) \leq -\alpha_2y^2 + \beta_2x^2 + \gamma_2. \end{aligned}$$

Из лемм 1 и 2, в силу теоремы 1, вытекает, что

$$\Phi_\lambda(x, y) \neq 0 \text{ при любых } \lambda \in [0, 1] \text{ и } (x, y) \in E^2, \|(x, y)\| > \sqrt{M}. \quad (9)$$

Следовательно, при любом  $\lambda \in [0, 1]$  определено вращение  $\gamma_\infty(\Phi_\lambda)$  векторного поля  $\Phi_\lambda$  на бесконечности [5, с.127] и

$$\gamma_\infty(\Phi_0) = \gamma_\infty(\Phi_1). \quad (10)$$

Вычислим вращение  $\gamma_\infty(\Phi_1)$  векторного поля  $\Phi_1$ . Для этого рассмотрим семейство векторных полей

$$\Psi_\lambda(x, y) = \begin{pmatrix} x(t) - x(\omega) - \lambda\alpha_1 \int_0^t x(s) ds - (1 - \lambda)\alpha_1 \int_0^\omega x(s) ds \\ y(t) - y(\omega) + \lambda\alpha_2 \int_0^t y(s) ds + (1 - \lambda)\alpha_2 \int_0^\omega y(s) ds \end{pmatrix}, \quad \lambda \in [0, 1].$$

Очевидно,  $\Psi_1 = \Phi_1$ . Проверим, что

$$\Psi_\lambda(x, y) \neq 0 \text{ при любых } \lambda \in [0, 1] \text{ и } (x, y) \in E^2 \setminus \{0, 0\}. \quad (11)$$

Действительно, если при некоторых  $\lambda \in [0, 1]$  и  $(x, y) \in E^2 \setminus \{0, 0\}$  имеет место равенство  $\Psi_\lambda(x, y) = 0$ , то имеем:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\lambda\alpha_1x(t), \quad y'(t) = \lambda\alpha_2x(t), \quad t \in [0, \omega], \\ \int_0^\omega x(s) ds &= 0, \quad \int_0^\omega y(s) ds = 0, \quad x(0) = x(\omega), \quad y(0) = y(\omega). \end{aligned}$$

Эти равенства в совокупности противоречат тому, что  $(x, y) \in E^2 \setminus \{0, 0\}$ .

Из (11) следует, что при любом  $\lambda \in [0, 1]$  определено вращение  $\gamma_\infty(\Psi_\lambda)$  векторного поля  $\Psi_\lambda(x, y)$  и с учетом  $\Psi_1 = \Phi_1$  имеет место равенство

$$\gamma_\infty(\Phi_1) = \gamma_\infty(\Psi_0). \quad (12)$$

Векторное поле  $\Psi_0$  состоит из разности единичного и конечномерного оператора. Поэтому, согласно свойству векторных полей [5, с.118], для вычисления вращения  $\gamma_\infty(\Psi_0)$  достаточно рассмотреть проекцию векторного поля  $\Psi_0$  на конечномерное пространство  $R \times R$ :

$$\gamma_\infty(\Psi_0) = \gamma_\infty(\tilde{\Psi}_0), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_0(z_1, z_2) &= \Psi_0(z_1, z_2), \quad (z_1, z_2) \in R \times R, \\ \tilde{\Psi}_0(z_1, z_2) &= \begin{pmatrix} \omega\alpha_1z_1 \\ -\omega\alpha_2z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\omega\alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для линейного отображения  $\tilde{\Psi}_0: R \times R \mapsto R \times R$  его вращение, как известно, равно знаку определителя матрицы отображения [5, с.24]:

$$\gamma_\infty(\tilde{\Psi}_0) = \text{sgndet} \begin{pmatrix} \omega\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\omega\alpha_2 \end{pmatrix} = -1. \quad (14)$$

Из равенств (10) и (12) - (14) следует, что вращение  $\gamma_\infty(\Phi_0)$  векторного поля  $\Phi_0$  на бесконечности равно -1. Согласно принципу ненулевого вращения [4, с.98], существует хотя бы один ноль векторного поля  $\Phi_0$ . А ноль векторного поля  $\Phi_0$ , согласно лемме 1, является  $\omega$ -периодическим решением системы уравнений (1).

Теорема 2 доказана.

**5. Два примера.** Рассмотрим два примера, где можно применять теоремы 1 и 2. В качестве первого примера рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x' = |x|^p x + f(t, x, y), \\ y' = -|y|^q y + g(t, x, y). \end{cases} \quad (15)$$

Здесь  $p \geq 0, q \geq 0$ , функции  $f(t, x, y)$  и  $g(t, x, y)$  непрерывны по совокупности переменных,  $\omega$ -периодичны по  $t$  и удовлетворяют условиям:

$$|f(t, x, y)| \leq f_1(|x| + |y|) + f_2, \quad |g(t, x, y)| \leq g_1(|x| + |y|) + g_2, \quad (16)$$

где  $f_1, f_2, g_1, g_2$  – неотрицательные числа, на них наложим некоторые условия.

Обозначим:

$$F(t, x, y) = |x|^p x + f(t, x, y), \quad G(t, x, y) = -|y|^q y + g(t, x, y).$$

Проверим, что функции  $F(t, x, y)$  и  $G(t, x, y)$  удовлетворяют условиям (2).

Для функции  $F(t, x, y)$ , согласно (16), имеем:

$$\begin{aligned} xF(t, x, y) &= |x|^p x^2 + xf(t, x, y) \geq |x|^p x^2 - |x|(f_1(|x| + |y|) + f_2) \geq \\ &\geq (|x|^p - f_1)x^2 - f_1|x||y| - f_2|x|. \end{aligned}$$

Покажем, что существуют положительные числа  $\alpha_1, \beta_1$  и  $\gamma_1$  такие, что при всех  $x, y, t \in R$  выполняется неравенство

$$(|x|^p - f_1)x^2 - f_1|x||y| - f_2|x| \geq \alpha_1 x^2 - \beta_1 y^2 - \gamma_1.$$

Действительно, левую часть оценим снизу следующим образом:

$$(|x|^p - f_1)x^2 - f_1|x||y| - f_2|x| \geq (|x|^p - f_1)x^2 - \frac{f_1}{2}(x^2 + y^2) - f_2|x|.$$

Подберем  $\alpha_1, \beta_1$  и  $\gamma_1$  так, чтобы выполнялось неравенство

$$\begin{aligned} (|x|^p - f_1)x^2 - \frac{f_1}{2}(x^2 + y^2) - f_2|x| &\geq \alpha_1 x^2 - \beta_1 y^2 - \gamma_1, \\ \left(|x|^p - \frac{3}{2}f_1 - \alpha_1\right)x^2 + \left(\beta_1 - \frac{f_1}{2}\right)y^2 - f_2|x| &\geq -\gamma_1 \end{aligned}$$

Рассмотрим два случая:  $p = 0$  и  $p > 0$ . В первом случае неравенство принимает вид

$$\left(1 - \frac{3}{2}f_1 - \alpha_1\right)x^2 + \left(\beta_1 - \frac{f_1}{2}\right)y^2 - f_2|x| \geq -\gamma_1.$$

Полагая  $0 \leq f_1 < \frac{2}{3}$ , положительные числа  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  можно взять

$$\beta_1 = \frac{f_1}{2}, \alpha_1 < 1 - \frac{3}{2}f_1, -\gamma_1 = \min_{\lambda \geq 0} \left( \left(1 - \frac{3}{2}f_1 - \alpha_1\right)\lambda^2 - f_2\lambda \right).$$

Во втором случае, когда  $p > 0$ , полагая  $\beta_1 = \frac{f_1}{2}$  и  $\alpha_1 = \frac{f_1}{2}$ , имеем:

$$(|x|^p - 2f_1)x^2 - f_2|x| \geq -\gamma_1,$$

где

$$-\gamma_1 = \min_{\lambda \geq 0} \left( (\lambda^p - 2f_1)\lambda^2 - f_2\lambda \right).$$

Приходим к выводу: функция  $F(t, x, y) = |x|^p x + f(t, x, y)$  удовлетворяет первому из условий (2), если либо  $p = 0$  и  $0 \leq f_1 < \frac{2}{3}$ ,  $f_2$  – произвольное неотрицательное число, либо  $p > 0$  и  $f_1, f_2$  – произвольные неотрицательные числа.

Аналогичным образом функция  $G(t, x, y) = -|y|^q y + g(t, x, y)$  удовлетворяет второму из условий (2), если либо  $q = 0$  и  $0 \leq g_1 < \frac{2}{3}$ ,  $g_2$  – произвольное неотрицательное число, либо  $q > 0$  и  $g_1, g_2$  – произвольные неотрицательные числа.

Действительно, для функции  $G(t, x, y)$  имеем:

$$\begin{aligned} yG(t, x, y) &= -|y|^q y^2 + yg(t, x, y) \leq -|y|^q y^2 + |y|(g_1(|x| + |y|) + g_2) \leq \\ &\leq \left(\frac{3}{2}g_1 - |y|^q\right)y^2 + \frac{g_1}{2}x^2 + g_2|y|, \\ \left(\frac{3}{2}g_1 - |y|^q\right)y^2 + \frac{g_1}{2}x^2 + g_2|y| &\leq -\alpha_2 y^2 + \beta_2 x^2 + \gamma_2. \\ \left(\frac{3}{2}g_1 + \alpha_2 - |y|^q\right)y^2 + \left(\frac{g_1}{2} - \beta_2\right)x^2 + g_2|y| &\leq \gamma_2. \end{aligned}$$

Если  $q = 0$ , то полагая  $0 \leq g_1 < \frac{2}{3}$ , выберем

$$\beta_2 = \frac{g_1}{2}, \alpha_2 < 1 - \frac{3}{2}g_1, \gamma_2 = \max_{\lambda \geq 0} \left( \left(\frac{3}{2}g_1 + \alpha_2 - 1\right)\lambda^2 + g_2\lambda \right).$$

А если  $q > 0$ , то положим  $\alpha_2 = \frac{g_1}{2}$ ,  $\beta_2 = \frac{g_1}{2}$ . Тогда имеет место неравенство

$$(2g_1 + \alpha_2 - |y|^q)y^2 + g_2|y| \leq \gamma_2,$$

где

$$\gamma_2 = \max_{\lambda \geq 0} \left( (2g_1 + \alpha_2 - \lambda^q)\lambda^2 + g_2\lambda \right).$$

Таким образом, из вышеприведенных рассуждений и в силу теорем 1 и 2 вытекает

**Следствие 1.** Если функции  $f(t, x, y)$ ,  $g(t, x, y)$  удовлетворяют условиям (16) и при  $p = 0$  выполнено неравенство  $0 \leq f_1 < \frac{2}{3}$ , а при  $q = 0$  - неравенство  $0 \leq g_1 < \frac{2}{3}$ , то ограниченные решения системы уравнений (14) допускают априорную оценку и среди них есть хотя бы одно  $\omega$ -периодическое решение.

В качестве второго примера рассмотрим нелинейное уравнение второго порядка следующего вида

$$x'' - p^2(t, x)x = q(t, x, x'), t, x \in R, \quad (17)$$

где функции  $p(t, \xi)$  и  $q(t, \xi, \eta)$  непрерывны по совокупности переменных. В этом уравнении произведем замену

$$x(t) = y(\mu t), \mu > 0.$$

Для  $y(t)$  получим уравнение

$$y'' - \mu^{-2}p^2(\mu^{-1}t, y)y = \mu^{-2}q(\mu^{-1}t, y, \mu y').$$

Данное уравнение представим в следующем виде:

$$\left(\frac{d}{dt} + \mu^{-1}p\right)\left(\frac{d}{dt} - \mu^{-1}p\right)y = -\mu^{-1}y\left(\mu^{-1}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y}y'\right) + \mu^{-2}q(\mu^{-1}t, y, \mu y').$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} z_1 &= y, & z_2 &= y' - \mu^{-1}p(\mu^{-1}t, y)y, \\ g_\mu(t, z_1, z_2) &= \mu^{-2}q(\mu^{-1}t, z_1, \mu z_2 + p(\mu^{-1}t, z_1)z_1) - \\ &\quad - \mu^{-1}z_1 \left[ \mu^{-1}\frac{\partial p}{\partial t}(\mu^{-1}t, z_1) + \frac{\partial p}{\partial z_1}(\mu^{-1}t, z_1)(z_2 + \mu^{-1}p(\mu^{-1}t, z_1)z_1) \right]. \end{aligned}$$

Тогда относительно неизвестных  $z_1(t)$  и  $z_2(t)$  получим систему уравнений

$$\begin{cases} z_1' = \mu^{-1}p(\mu^{-1}t, z_1)z_1 + z_2, \\ z_2' = -\mu^{-1}p(\mu^{-1}t, z_1)z_2 + g_\mu(t, z_1, z_2). \end{cases} \quad (18)$$

Предположим, что существуют  $\mu > 0$ ,  $p_0 > 1$ ,  $0 \leq g_0 < \frac{p_0}{2}$ ,  $g_1 \geq 0$  такие, что при всех  $t, z_1, z_2 \in R$  выполняются условия

$$\mu^{-1}p(\mu^{-1}t, z_1) \geq p_0, \quad (19)$$

$$|g_\mu(t, z_1, z_2)| \leq g_0(|z_1| + |z_2|) + g_1. \quad (20)$$

Проверим, что правые части системы уравнений (18) удовлетворяют условиям (2):

$$(\mu^{-1}p(\mu^{-1}t, z_1)z_1 + z_2)z_1 \geq p_0z_1^2 - \frac{z_1^2}{2} - \frac{z_2^2}{2} = \left(p_0 - \frac{1}{2}\right)z_1^2 - \frac{1}{2}z_2^2,$$

$$\alpha_1 = p_0 - \frac{1}{2}, \quad \beta_1 = \frac{1}{2}, \quad \gamma_1 = 0;$$

$$\begin{aligned} & \left(-\mu^{-1}p(\mu^{-1}t, z_1)z_2 + g_\mu(t, z_1, z_2)\right)z_2 \leq -p_0z_2^2 + g_0(|z_1| + |z_2|)|z_2| + g_1|z_2| \leq \\ & \leq -(p_0 - g_0)z_2^2 + \frac{1}{2}g_0(z_1^2 + z_2^2) + g_1|z_2| = -\left(p_0 - \frac{3}{2}g_0\right)z_2^2 + \frac{1}{2}g_0z_1^2 + g_1|z_2| = \\ & = -\left(p_0 - \left(\frac{3}{2} + \varepsilon\right)g_0\right)z_2^2 + \frac{1}{2}g_0z_1^2 + g_1|z_2| - \varepsilon g_0z_2^2. \end{aligned}$$

Выберем  $\varepsilon > 0$  так, чтобы  $p_0 > (2 + \varepsilon)g_0$ . Тогда полагая

$$\alpha_2 = p_0 - \left(\frac{3}{2} + \varepsilon\right)g_0, \quad \beta_2 = \frac{1}{2}g_0, \quad \gamma_2 = \max_{\lambda \geq 0}(g_1\lambda - \varepsilon g_0\lambda^2),$$

имеем:

$$\left(-\mu^{-1}p(\mu^{-1}t, z_1)z_2 + g_\mu(t, z_1, z_2)\right)z_2 \leq -\alpha_2z_2^2 + \beta_2z_1^2 + \gamma_2.$$

Заметим, что  $\beta_1 < \alpha_1$  и  $\beta_2 < \alpha_2$ , т.е. условие (3) также выполнено. Отсюда, в силу теорем 1 и 2, вытекает

**Следствие 2.** Если выполнены условия (19), (20) и условие

$$\sup_{t \in R, |\xi| < M} p(t, \xi) < \infty, \quad (21)$$

то имеет место априорная оценка

$$\sup_{t \in R} |x(t)| + \sup_{t \in R} |x'(t)| < M \quad (22)$$

для любого решения  $x(t)$  уравнения (17), определенного на всей числовой оси и ограниченного со своей производной. А если к тому же, функции  $p(t, \xi)$  и  $q(t, \xi, \eta)$   $\omega$ -периодичны по  $t$ , то существует  $\omega$ -периодическое решение уравнения (17).

Рассмотрим уравнение

$$x'' - 4(1 + e^x)^2 x = 2xe^x x' + q_0(t, x, x'), \quad (23)$$

где функция  $q_0(t, \xi, \eta)$  непрерывна по совокупности переменных и ограничена  $\sup_{t, \xi, \eta \in R} |q_0(t, \xi, \eta)| < \infty$ .

Полагая  $\mu = 1, p_0 = 2, g_0 = 0$ , имеем:

$$g_\mu(t, z_1, z_2) = 2z_1 e^{z_1} (z_2 + 2(1 + e^{z_1})z_1) + q_0(t, z_1, z_2 + 2(1 + e^{z_1})z_1) - \\ - 2z_1 e^{z_1} (z_2 + 2(1 + e^{z_1})z_1) = q_0(t, z_1, z_2 + 2(1 + e^{z_1})z_1), \\ |g_\mu(t, z_1, z_2)| \leq \sup_{t, \xi, \eta \in R} |q_0(t, \xi, \eta)| = g_1.$$

Следовательно, если функция  $q_0(t, \xi, \eta)$  периодична по переменной  $t$  с периодом  $\omega$ , то существует  $\omega$ -периодическое решение уравнения (23).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мухамадиев Э. Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений / Э. Мухамадиев // Матем. заметки. -1981. – Т.30. -№3. -С.713-722.
2. Мухамадиев Э. К теории периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Э. Мухамадиев // Докл. АН СССР. - 1970. – Т.194. -№11. -С.510–513.
3. Мухамадиев Э. О периодических и ограниченных решениях систем двух нелинейных уравнений / Э. Мухамадиев // Докл. АН Тадж. ССР. - 1976. –Т.19. -№3. –С.3-6.
4. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М. А. Красносельский. –М.: Наука, 1966. -331 с.
5. Красносельский М. А. Геометрические методы нелинейного анализа / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко. – М.: Наука, 1975. -512 с.

#### ДОИР БА БАҶОИ АПРИОРӢ ВА МАВҶУДИЯТИ ҲАЛҶОИ ДАВРИИ ЯК НАМУДИ СИСТЕМАИ МУОДИЛАҶОИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ ОДӢ

Дар мақола масъалаи ҷой доштани баҳои априорӣ ва мавҷудияти ҳалҳои даврӣ барои як намуди системаи муодилаҳои дифференсиалии одӣ омӯхта шудааст. Системаи муодилаҳои тадқиқшаванда дар муқоиса бо дигар системаҳои муодилаҳои омӯхташуда бо он фарқ мекунад, ки тарафҳои рости муодилаҳо ҳамчун функсияҳои якҷандтағйирёбанда ҳаттӣ ё ғайриҳаттӣ шуда метавонанд ва дар ҳолати ғайриҳаттӣ будан тартиби афзоиши онҳо метавонад номаҳдуд бошад. Исробот шудааст, ки агар тарафҳои рости муодилаҳо шартҳои муайянро қонеъ кунанд, он гоҳ баҳои априорӣ барои ҳалҳои маҳдуд ҷой дорад. Дар асоси баҳои априорӣ бо истифода аз методҳои ҳисобкунии ҷарҳзании майдонҳои векторӣ мавҷудияти ҳалҳои даврӣ исбот карда шудааст. Мисолҳои мушаххаси системаи муодилаҳои дифференсиалии одии ғайриҳаттӣ баррасӣ шудаанд, ки барои онҳо шартҳои баҳои априорӣ ва мавҷудияти ҳалҳои даврӣ иҷро мешаванд.

**Калидвожаҳо:** системаи муодилаҳои дифференсиалии одии ҳаттӣ ва ғайриҳаттӣ, ҳалҳои маҳдуд ва даврӣ, баҳои априорӣ, ҷарҳзании майдони векторӣ.

#### ОБ АПРИОРНОЙ ОЦЕНКЕ И СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В статье исследован вопрос об априорной оценке и существовании периодических решений для одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследуемая система уравнений в отличие от других может быть линейной или нелинейной, и в нелинейном случае не ставятся ограничения на порядок роста правых частей. Найдены новые условия на правые части уравнений в виде односторонних оценок, обеспечивающих априорную оценку всех ограниченных решений. В условиях априорной оценки доказано существование  $\omega$ -периодических решений, применяя методы вычисления вращения векторных полей. Рассмотрены примеры систем уравнений, удовлетворяющих условиям априорной оценки и существования  $\omega$ -периодических решений.

**Ключевые слова:** система линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, ограниченное решение, периодическое решение, априорная оценка, вращение векторного поля.

#### ABOUT THE PRIOR ESTIMATION AND EXISTENCE OF PERIODIC SOLUTIONS FOR THE SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

In this article is investigated a priori estimation and existence of periodic solutions for the system of ordinary differential equations. New conditions on the right-hand sides of the equations in the form of one-sided estimates are founded, which provide a priori estimation of all bounded solutions. At the same time, unlike the above other works, the system under study can be linear or nonlinear, and in the nonlinear case there are no restrictions on the order of growth of the right parts. In the conditions of a priori estimation the existence of  $\omega$  – periodic solutions is proved using the methods of vector fields rotation calculation. Examples of systems of equations satisfying the conditions of a priori estimation and existence of  $\omega$  – periodic solutions are considered.

**Key words:** system of nonlinear ordinary differential equations, bounded solution, periodic solution, priori estimate, rotation of a vector field.

**Сведения об авторах:** *Кобилзода Мирзоодили Мирзомалик* - Научно-исследовательского института Таджикского национального университета, аспирант отделение математики. **Адрес:** 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки 17, Таджикский национальный университет. E-mail: [kobilzoda94@mail.ru](mailto:kobilzoda94@mail.ru)  
*Наимов Алижон Набиджанович* - Вологодский государственный университет, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры информатики и информационных технологий. **Адрес:** 160000, Россия, г. Вологда, улица Ленина 15, Вологодский государственный университет. E-mail: [nan67@rambler.ru](mailto:nan67@rambler.ru)

**Information about the authors:** *Kobilzoda Mirzoodili Mirzomalik* - Research Institute of the Tajik National University, graduate student of the Department of Mathematics. **Address:** 734025, Republic of Tajikistan, Dushanbe, Rudaki Ave. 17, Tajik National University. E-mail: [kobilzoda94@mail.ru](mailto:kobilzoda94@mail.ru)  
*Naimov Alijon Nabidzhanovich* - Vologda State University, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Department of Informatics and Information Technology. **Address:** 160000, Russia, Vologda, 15 Lenin Street, Vologda State University. E-mail: [nan67@rambler.ru](mailto:nan67@rambler.ru)

УДК 517 956

## ВЫРОЖДЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ 2-ГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

*Орипов Т.С.*

Таджикский технический университет им. С.Осими

В некоторых работах [1- 6], были изучены различные типы переопределённых систем уравнений в частных производных первого и второго порядка с регулярными и сингулярными правыми частями. Учитывая условия их совместности, тождественного выполнения и многообразия решений, были найдены определённые формулы. В предлагаемой работе рассматривается переопределённая система уравнений второго порядка вида:

$$\begin{cases} x^n \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a_1(x, y, z) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f_1(x, y, z) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^m, \\ y^n \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = a_2(x, y, z) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f_2(x, y, z) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^m, \\ z^n \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = a_3(x, y, z) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f_3(x, y, z) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^m, \end{cases} \quad (1)$$

где все функции  $a_i(x, y, z)$ , и  $f_i(x, y, z)$ ,  $j=1,2,3$  заданы в параллелепипеде  $\Pi_3$ :  $0 \leq |x| \leq r_1$ ,  $0 \leq |y| \leq r_2$ ,  $0 \leq |z| \leq r_3$ ,  $n$  целое положительное число,  $m$  - вещественно положительное число. Поскольку в начале координат, а также по прямым линиям  $\Gamma_1 = \{M(x, y, z) | x=0\}$ ,  $\Gamma_2 = \{M | y=0\}$ ,  $\Gamma_3 = \{M | z=0\}$  задачу Коши ставить нельзя, поэтому в системе (1) начальные условия, либо задачи Коши ставим по следующим формулам

$$u = u_0 \text{ при } x = x_0, y = y_0, z = z_0, (x_0, y_0, z_0 \neq 0). \quad (2)$$

В системе (1), делая замену вида  $\frac{\partial u}{\partial x} = V$ ,  $V = V(x, y, z)$ , преобразуем ее к следующему виду:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{a_1(x, y, z)}{x^n} \cdot V + \frac{f_1(x, y, z)}{x^n} \cdot V^k, \\ \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{a_2(x, y, z)}{y^n} \cdot V + \frac{f_2(x, y, z)}{y^n} \cdot V^k, \\ \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{a_3(x, y, z)}{z^n} \cdot V + \frac{f_3(x, y, z)}{z^n} \cdot V^k. \end{cases} \quad (3)$$

Тогда начальные условия для системы (3) ставятся в виде

$$V = V_0 \text{ при } x = x_0, y = y_0, z = z_0. \quad (4)$$

Также условия совместности системы (3) записываются формулами

$$\begin{cases} (y^n \cdot a'_{1y} - x^n \cdot a'_{2x}) \cdot V + [y^n \cdot b'_{1y} - x^n \cdot b'_{2x} + (k-1) \cdot (a_2 b_1 - a_1 b_2)] \cdot V^k = 0, \\ (z^n \cdot a'_{1z} - x^n \cdot a'_{3x}) \cdot V + [z^n \cdot b'_{1z} - x^n \cdot b'_{3x} + (k-1) \cdot (a_3 b_1 - a_1 b_3)] \cdot V^k = 0, \\ (z^n \cdot a'_{2z} - y^n \cdot a'_{3y}) \cdot V + [z^n \cdot b'_{2z} - y^n \cdot b'_{3y} + (k-1) \cdot (a_3 b_2 - a_2 b_3)] \cdot V^k = 0, \end{cases}$$

или  $P_j(x, y, z) \cdot V + Q_j(x, y, z) \cdot V^k = 0, \quad (j = 1, 2, 3).$  (5)

где  $P_1(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{a_1}{x^n} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{a_2}{y^n} \right), \quad P_2(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{a_1}{x^n} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{a_3}{z^n} \right),$

$$P_3(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{a_2}{y^n} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{a_3}{z^n} \right), \quad Q_1(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{b_1}{x^n} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{b_2}{y^n} \right) + (k-1) \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{(xy)^n},$$

$$Q_2(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{b_1}{x^n} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{b_3}{z^n} \right) + (k-1) \frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{(xz)^n}, \quad (6)$$

$$Q_3(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{b_2}{y^n} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{b_3}{z^n} \right) + (k-1) \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{(yz)^n} \dots$$

Пусть в системе (1), либо (3) при ограниченных значениях производных на линиях вырождения существуют [4]

$$\lim_{x, y, z \rightarrow 0} \left( x^n \frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0, \quad \lim_{x, y, z \rightarrow 0} \left( y^n \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0, \quad \lim_{x, y, z \rightarrow 0} \left( z^n \frac{\partial V}{\partial z} \right) = 0, \quad (M)$$

то в силу этих условий из системы (3) необходимо имеем  $a_k(0,0,0) = a_{0k} \equiv 0, b_k(0,0,0) = b_{0k} \equiv 0, (k = 1, 2, 3)$ . И тогда находится тривиальное решение исходной системы (3):  $V = 0$ , или получаем  $u(x, y, z) = C = const.$ . Это означает, что на линиях вырождения исходная система (1) более чем тривиального, других решений не имеет. Условия совместности (5) можем рассматривать в нескольких случаях.

1. Пусть все соотношения из (5), выполняются, но не тождественно. Тогда решая их алгебраическим способом, находим  $V = 0, V = h_j(x, y, z), j = 1, 2, 3$ . Если хотя бы одна из этих функций удовлетворяет системе (5), то она будет частным решением этой системы.  $V = 0$  считаем тривиальным решением системы (3). В противном случае, системы (3) и (1) не имеют более чем тривиального- известного решения.

2. Пусть в условии совместности (5) системы (3):  $P_j(x, y, z) \equiv 0, Q_j(x, y, z) \neq 0$ , либо  $P_j(x, y, z) \neq 0, Q_j(x, y, z) \equiv 0$ . То при этих значениях функций  $P_j, Q_j$  - из (6), система (5), также более чем тривиального, другие решения не может иметь.