УДК 517.925.4

О положительных решениях модельной системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

М. М. Кобилзода, А. Н. Наимов

Кобилзода Мирзоодил Мирзомалик, аспирант, Научно-исследовательский институт, Таджикский национальный университет, Республика Таджикистан, 734025, г. Душанбе, просп. Рудаки, д. 17, kobilzoda94@mail.ru
Наимов Алижон Набиджанович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики и информационных технологий, Вологодский государственный университет, Россия, 160000, г. Вологда, ул. Ленина, д. 15, nan67@rambler.ru

В статье исследованы свойства положительных решений модельной системы двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Найдены новые условия на коэффициенты, при выполнении которых произвольное решение $(x(t), y(t))$ с положительными начальными значениями $x(0)$ и $y(0)$ положительно, нелокально продолжимо и ограничено при $t > 0$. В этих условиях исследован вопрос о глобальной устойчивости положительных решений методом построения направляющей функции и методом предельных уравнений. Методом построения направляющей функции доказано, что если система уравнений имеет положительное постоянное решение (x_*, y_*), то любое положительное решение $(x(t), y(t))$ при $t \to +\infty$ приближается к (x_*, y_*). А в случае, когда коэффициенты системы уравнений имеют конечные пределы при $t \to +\infty$ и предельная система уравнений имеет положительное постоянное решение (x_∞, y_∞), методом предельных уравнений доказано, что любое положительное решение $(x(t), y(t))$ при $t \to +\infty$ приближается (x_∞, y_∞). Полученные результаты впоследствии можно обобщить для многомерного аналога исследуемой системы уравнений.

Ключевые слова: модельная система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, положительное решение, нелокальное продолжение, глобальная устойчивость положительных решений, метод построения направляющей функции, метод предельных уравнений.

Поступила в редакцию: 17.06.2019 / Принята: 30.09.2019 / Опубликована: 01.06.2020

DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-161-171

ВВЕДЕНИЕ

Статья посвящена исследованию положительных решений модельной системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$x'(t) = c(t)(Y(t) - y(t))x(t) - k_1(t)x(t), \quad y'(t) = a(t)(Y(t) - y(t))x(t) - k_2(t)y(t). \quad (1)$$

Здесь коэффициенты $c(t)$, $a(t)$, $Y(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$ считаются заданными и непрерывными при $t \geqslant 0$. Положительным решением системы уравнений (1) называем пару $(x(t), y(t))$ функций $x(t)$ и $y(t)$, определенных, непрерывных и положительных на некотором максимальном полуинтервале $[0, T)$ и внутри данного полуинтервала удовлетворяющих уравнениям системы (1). Если $T = +\infty$, то решение $(x(t), y(t))$ называем нелокально продолжимым при $t > 0$.

Система уравнений (1) в случае постоянных и положительных коэффициентов исследована в работах [2, 3] как динамическая модель производства и продажи товара. Данной моделью адекватно описываются темпы производства и продажи определенного вида товара, если произвольное решение $(x(t), y(t))$ системы уравнений (1) с положительными начальными значениями $x(0)$ и $y(0)$ остается положительным и ограниченным при $t > 0$. Если к тому же любое положительное решение системы уравнений (1) при $t \to +\infty$ приближается к единственному положительному постоянному решению (x_*, y_*), то это интерпретируется как самостабилизация рынка товара. В работах [3] доказано, что динамическая модель (1) обладает указанными свойствами положительности и самостабилизации, если коэффициенты постоянны, положительны и $cY > k_1$. В связи с этим представляется актуальным исследование свойств положительности и самостабилизации динамической модели (1) с переменными коэффициентами.

В работе [4] исследованы свойства положительных и периодических решений системы уравнений вида (1) в случае, когда коэффициенты c, a, Y, k_1, k_2 зависят от t, x и y. В частности, исследована диссипативность положительных решений, состоящая в том, что любое положительное решение $(x(t), y(t))$ при $t > t_0$ остается в фиксированном ограниченном множестве. Отметим, что общие свойства диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений исследованы в монографии [5, с. 29–70].

В настоящей работе найдены новые условия на коэффициенты, при выполнении которых произвольное решение $(x(t), y(t))$ с положительными начальными значениями $x(0)$ и $y(0)$ положительно, нелокально продолжимо и ограничено при $t > 0$. В этих условиях исследован вопрос о глобальной устойчивости положительных решений методом построения направляющей функции и методом предельных уравнений. Глобальная устойчивость положительных решений понимается в следующем смысле: все положительные решения определены на промежутке $[0, +\infty)$ и при $t \to +\infty$ приближаются к одному фиксированному решению. Методом построения направляющей функции доказано, что если система уравнений имеет положительное постоянное решение (x_*, y_*), то любое положительное решение $(x(t), y(t))$ при $t \to +\infty$ приближается к (x_*, y_*). А в случае, когда коэффициенты системы уравнений имеют конечные пределы при $t \to +\infty$ и предельная система уравнений имеет положительное постоянное решение (x_∞, y_∞), методом предельных уравнений доказано, что любое положительное решение $(x(t), y(t))$ при $t \to +\infty$ приближается к (x_∞, y_∞). Полученные результаты впоследствии можно обобщить для многомерного аналога исследуемой системы уравнений.

1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Сначала исследуем условия, при которых произвольное решение $(x(t), y(t))$ системы уравнений (1) с положительными начальными значениями $x(0)$ и $y(0)$ положительно, нелокально продолжимо и ограничено при $t > 0$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функции $c(t)$, $a(t)$, $Y(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$ определены и непрерывны на промежутке $[0, +\infty)$ и пусть $(x(t), y(t))$, $t \in [0, T)$ — произвольное решение системы уравнений* (1). *Тогда:*

1) решение $(x(t), y(t))$ положительно, т. е. $x(t) > 0$ и $y(t) > 0$ при $t \in (0, T)$, если положительны $x(0)$, $y(0)$ и $a(t)Y(t) \geqslant 0$ при $t > 0$;

2) решение $(x(t), y(t))$ определено на промежутке $[0, +\infty)$, т. е. $T = +\infty$, если $(x(t), y(t))$ положительно и для любого $t_2 > 0$ существует $t_1 \in (0, t_2)$ такое, что на отрезке $[t_1, t_2]$ одна из функций $c(t)$ и $a(t)$ неотрицательна;

3) решение $(x(t), y(t))$ ограничено, если оно определено и положительно на промежутке $[0, +\infty)$ и выполнены условия;

а) функции $Y(t)$ и $k_2(t)$ ограничены;

б) существуют $\tau > 0$ и $k_1^0 > 0$ такие, что при $t > \tau$ имеют место неравенства $a(t) \geqslant 0$, $k_1(t) > k_1^0$, $k_2(t) > 0$;

в) при некотором положительном числе μ имеет место предел

$$\lim_{t \to +\infty} (a(t) - \mu c(t)) = 0.$$

Из теоремы 1 непосредственно вытекает

Следствие 1. *Произвольное решение $(x(t), y(t))$ системы уравнений (1) с положительными начальными значениями $x(0)$ и $y(0)$ определено, положительно и ограничено на промежутке $[0, +\infty)$, если:*

г) функции $c(t)$, $a(t)$, $Y(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$ определены и непрерывны на промежутке $[0, +\infty)$;

д) $a(t)Y(t) \geqslant 0$ при $t > 0$;

е) функции $c(t)$, $a(t)$, $Y(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$ при $t \to +\infty$ приближаются к положительным числам c_∞, a_∞, Y_∞, $k_{1,\infty}$, $k_{2,\infty}$ соответственно и $c_\infty Y_\infty > k_{1,\infty}$.

Исследуем глобальную устойчивость положительных решений системы уравнений (1), предполагая, что среди положительных решений есть постоянное.

Теорема 2. *Пусть функции $c(t)$, $a(t)$, $Y(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$ определены и непрерывны на промежутке $[0, +\infty)$, ограничены снизу и сверху соответствующими положительными числами. И пусть система уравнений (1) имеет положительное постоянное решение (x_*, y_*) такое, что функция*

$$B(t) = y_* \frac{k_2(t)}{k_1(t)} (Y(t) - y_*)$$

определена и непрерывно дифференцируема на промежутке $(0, +\infty)$, ограничена снизу и сверху положительными числами B_1 и B_2 и, кроме того, $B'(t) \leqslant 0$ при $t > 0$. Тогда любое положительное решение $(x(t), y(t))$ системы уравнений (1) при $t \to +\infty$ приближается к (x_*, y_*).

Теорема 2 доказана методом построения направляющей функции [6, с. 75–84], убывающей вдоль положительных решений системы уравнений (1). Из следствия 1 и теоремы 2 вытекает

Следствие 2. *В автономной системе*

$$x' = c_0(Y_0 - y)x - k_{10}x, \qquad y' = a_0(Y_0 - y)x - k_{20}y, \tag{2}$$

где c_0, a_0, Y_0, k_{10}, k_{20} — положительные числа и $c_0 Y_0 > k_{10}$, любая траектория, выпущенная из первой четверти координатной плоскости Oxy, остается в этой четверти при возрастании времени и приближается к стационарной точке

$$x_0 = \frac{k_{20}}{a_0 k_{10}} (c_0 Y_0 - k_{10}), \qquad y_0 = \frac{1}{c_0} (c_0 Y_0 - k_{10})$$

при неограниченном возрастании времени. Стационарная точка (x_0, y_0) *является единственной траекторией автономной системы* (2), *лежащей в первой четверти, отделенной от нуля и ограниченной при возрастании и убывании времени.*

Следующая теорема является дополнением к теореме 2.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия г), д) и е). Тогда любое положительное решение* $(x(t), y(t))$ *системы уравнений* (1) *при* $t \to +\infty$ *приближается к точке* (x_∞, y_∞)*, где*

$$x_\infty = \frac{k_{2,\infty}}{a_\infty k_{1,\infty}} \left(c_\infty Y_\infty - k_{1,\infty}\right), \qquad y_\infty = \frac{1}{c_\infty} \left(c_\infty Y_\infty - k_{1,\infty}\right).$$

Теорема 3 доказана методом предельных уравнений. Данный метод применяется в работах [7, 8] при исследовании ограниченных решений систем линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

1. Пусть $(x(t), y(t))$, $t \in [0, T)$ — решение системы уравнений (1) с положительными начальными значениями $x(0)$, $y(0)$ и пусть $a(t)Y(t) \geqslant 0$ при $t > 0$. Проверим, что $x(t) > 0$ и $y(t) > 0$ при $t \in (0, T)$.

Из первого уравнения системы (1) находим

$$x(t) = x(0) e^{\int_0^t (c(s)(Y(s) - y(s)) - k_1(s)) ds}.$$

Отсюда следует, что $x(t) > 0$ при $t \in [0, T)$. Второе уравнение системы (1) представляя в следующем виде:

$$y'(t) + (a(t)x(t) + k_2(t))y(t) = a(t)Y(t)x(t),$$

находим

$$y(t) = e^{-\int_0^t (a(\tau)x(\tau) + k_2(\tau)) d\tau} \left(y(0) + \int_0^t a(s)Y(s)x(s) e^{\int_0^s (a(\tau)x(\tau) + k_2(\tau)) d\tau} ds \right).$$

Отсюда следует, что $y(t) > 0$ при $t \in [0, T)$.

2. Пусть $(x(t), y(t))$, $t \in [0, T)$ — положительное решение системы уравнений (1) и пусть для любого $t_2 > 0$ существует $t_1 \in (0, t_2)$ такое, что на отрезке $[t_1, t_2]$ одна из функций $c(t)$ и $a(t)$ неотрицательна. Покажем, что $T = +\infty$.

Предположим, что $T < +\infty$. Тогда на полуинтервале $[0, T)$ одна из функций $x(t)$, $y(t)$ неограничена. Заметим, что если одна из функций $x(t)$, $y(t)$ ограничена, то в силу системы уравнений (1) другая также ограничена. Поэтому обе функции $x(t)$, $y(t)$ неограничены на полуинтервале $[0, T)$.

Для $t_2 = T$, согласно нашим условиям, существует $t_1 \in (0, T)$ такое, что на отрезке $[t_1, T]$ одна из функций $c(t)$ и $a(t)$ неотрицательна. Если $c(t) \geqslant 0$ при $t \in [t_1, T]$, то из первого уравнения системы (1) выводим:

$$x'(t) \leqslant \left(c(t)Y(t) - k_1(t)\right) x(t), \quad t \in (0, T),$$
$$x(t) \leqslant x(t_1) e^{\int_{t_1}^t (c(s)Y(s) - k_1(s)) ds} \leqslant x(t_1) e^{R_T (T - t_1)}, \quad t \in (0, T),$$

где $R_T = \max\limits_{0 \leqslant s \leqslant T} |c(s)Y(s) - k_1(s)|$. Пришли к противоречию.

Если $a(t) \geqslant 0$ при $t \in [t_1, T]$, то выберем число Y_1 так, чтобы имели место неравенства $Y_1 > y(t)$ при $t \in [0, t_1]$ и $Y_1 > Y(t)$ при $t \in [t_1, T]$. Очевидно, при любом $t \in (t_1, T)$ либо $y(t) \leqslant Y_1$, либо $y(t) > Y_1$. На любом максимальном интервале $(\tau_1, \tau_2) \subset (t_1, T)$, где $y(t) > Y_1$, в силу второго уравнения системы (1) имеем:

$$y'(t) \leqslant -k_2(t)y(t), \quad t \in (\tau_1, \tau_2),$$
$$y(\tau_1) = Y_1, \qquad y(t) \leqslant Y_1 e^{K_T T}, \quad t \in (\tau_1, \tau_2),$$

где

$$K_T = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} |k_2(t)|.$$

Следовательно, $y(t) \leqslant Y_1 e^{K_T T}$ при любом $t \in [0, T)$, пришли к противоречию.

3. Пусть решение $(x(t), y(t))$ системы уравнений (1) определено и положительно на промежутке $[0, +\infty)$ и пусть выполнены условия:

а) функции $Y(t)$ и $k_2(t)$ ограничены;

б) существуют $\tau > 0$ и $k_1^0 > 0$ такие, что при $t > \tau$ имеют место неравенства $a(t) \geqslant 0$, $k_1(t) > k_1^0$, $k_2(t) > 0$;

в) при некотором положительном числе μ имеет место предел

$$\lim_{t \to +\infty} (a(t) - \mu c(t)) = 0.$$

Покажем, что $(x(t), y(t))$ ограничено на промежутке $[0, +\infty)$.

Сперва покажем ограниченность $y(t)$ на промежутке $[0, +\infty)$. Для этого выберем $Y_0 > 0$ так, чтобы выполнялись неравенства $y(\tau) < Y_0$ и $Y(t) < Y_0$ при $t \geqslant 0$. Проверим, что $y(t) < Y_0$ при $t > \tau$. Действительно, в противном случае в первой точке $t_0 > \tau$, где имеет место равенство $y(t_0) = Y_0$, должно выполняться неравенство $y'(t_0) \geqslant 0$. С другой стороны, в силу второго уравнения системы (1), учитывая $a(t_0) \geqslant 0$, $Y(t_0) - y(t_0) < 0$, $k_2(t_0) > 0$, имеем $y'(t_0) \leqslant -k_2(t_0)y(t_0) < 0$, приходим к противоречию.

Ограниченность $x(t)$ будет доказана, если покажем, что существуют $\tau_1 > \tau$ и $M > 0$ такие, что при $x(t) > M$ и $t > \tau_1$ имеет место неравенство $y(t) - \mu(x(t) - x(\tau_1)) > 0$. Для этого достаточно подобрать $\tau_1 > \tau$ и $M > 0$ так, чтобы при $x(t) > M$ и $t > \tau_1$ имело место неравенство $y'(t) - \mu x'(t) > 0$. Найдем разность $y'(t) - \mu x'(t)$ из системы уравнений (1):

$$y'(t) - \mu x'(t) = \left[(a(t) - \mu c(t))(Y(t) - y(t)) + \mu k_1(t)\right] x(t) - k_2(t)y(t). \tag{3}$$

Воспользовавшись условиями а), б) и в), выберем $\tau_1 > \tau$ так, чтобы при $t > \tau_1$ выполнялось неравенство

$$(a(t) - \mu c(t))(Y(t) - y(t)) + \mu k_1(t) > \mu \frac{k_1^0}{2}.$$

А число $M > 0$ выберем из условия

$$\mu \frac{k_1^0}{2} M - Y_0 \sup_{t \geqslant 0} k_2(t) > 0.$$

Тогда из (3) следует, что $y'(t) - \mu x'(t) > 0$ при $x(t) > M$ и $t > \tau_1$.

Теорема 1 доказана.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Пусть $(x(t), y(t))$, $t \in [0, T)$ — произвольное положительное решение системы уравнений (1). Рассмотрим функцию

$$v(t) = \frac{1}{2}(y(t) - y_*)^2 + B(t)\left(\frac{x(t)}{x_*} - \ln\frac{x(t)}{x_*}\right). \tag{4}$$

Функция $v(t)$ снизу ограничена числом B_1:

$$v(t) \geqslant B(t)\left(\frac{x(t)}{x_*} - \ln\frac{x(t)}{x_*}\right) \geqslant B(t) \geqslant B_1,$$

так как $s - \ln s \geqslant 1$ при всех $s > 0$. Покажем, что для производной $v'(t)$ функции $v(t)$ имеет место неравенство

$$v'(t) \leqslant -k_2(t)(y(t) - y_*)^2\left(1 + \frac{y_*}{x_*}\frac{x(t)}{Y(t) - y_*}\right). \tag{5}$$

Для этого представим систему уравнений (1) в следующем виде:

$$x'(t) = A(t)(y_* - y(t))x(t), \qquad y'(t) = k_2(t)\left(\frac{y_*}{x_*}\frac{Y(t) - y(t)}{Y(t) - y_*}x(t) - y(t)\right), \tag{6}$$

где $A(t) = y_* k_2(t)/B(t)$. Для функции $A(t)$ верна оценка $A_1 \leqslant A(t) \leqslant A_2$, где

$$A_1 = y_*\frac{\alpha_1}{B_2}, \qquad A_2 = y_*\frac{\alpha_2}{B_1},$$
$$B_1 = \inf_{t\geqslant 0} B(t), \qquad B_2 = \sup_{t\geqslant 0} B(t), \qquad \alpha_1 = \inf_{t\geqslant 0} k_2(t) > 0, \quad \alpha_2 = \sup_{t\geqslant 0} k_2(t).$$

Теперь вычислим $v'(t)$ и оценим ее сверху, учитывая условие $B'(t) \leqslant 0$ и систему уравнений (6):

$$v'(t) = (y(t) - y_*)y'(t) + B(t)\left(\frac{1}{x_*} - \frac{1}{x(t)}\right)x'(t) + B'(t)\left(\frac{x(t)}{x_*} - \ln\frac{x(t)}{x_*}\right) \leqslant$$
$$\leqslant (y(t) - y_*)y'(t) + \frac{B(t)}{x_*}(x(t) - x_*)\frac{x'(t)}{x(t)} = (y(t) - y_*)\left(y'(t) - \frac{B(t)}{x_*}(x(t) - x_*)A(t)\right) =$$
$$= (y(t) - y_*)\left(k_2(t)\left[\frac{y_*}{x_*}\frac{Y(t) - y(t)}{Y(t) - y_*}x(t) - y(t)\right] - \frac{y_*}{x_*}k_2(t)(x(t) - x_*)\right) =$$
$$= k_2(t)(y(t) - y_*)\left(y_* - y(t) + \frac{y_*}{x_*}\frac{y_* - y(t)}{Y(t) - y_*}x(t)\right) = -k_2(t)(y(t) - y_*)^2\left(1 + \frac{y_*}{x_*}\frac{x(t)}{Y(t) - y_*}\right).$$

Из доказанного неравенства (5) следует, что $v(t) \leqslant v(0)$ и

$$(y(t) - y_*)^2 + 2B_1\left(\frac{x(t)}{x_*} - \ln\frac{x(t)}{x_*}\right) \leqslant 2v(0),$$
$$y(t) - y_* \leqslant \sqrt{2v(0)}, \qquad \frac{x(t)}{x_*} - \ln\frac{x(t)}{x_*} \leqslant \frac{v(0)}{B_1},$$
$$y(t) \leqslant y_* + \sqrt{2v(0)}, \qquad x_*\xi_1 \leqslant x(t) \leqslant x_*\xi_2, \tag{7}$$

где ξ_1, ξ_2 — корни скалярного уравнения

$$\xi - \ln \xi = \frac{v(0)}{B_1}.$$

Таким образом, в силу полученных оценок (7) решение $(x(t), y(t))$ определено и ограничено на промежутке $[0, +\infty)$. Покажем, что $(x(t), y(t)) \to (x_*, y_*)$ при $t \to +\infty$.

Из $v(t) \geqslant B_1$ и $v'(t) \leqslant 0$ следует существование и конечность предела

$$\lim_{t \to +\infty} v(t) = v_\infty.$$

Из неравенства (5) выводим:

$$v'(t) \leqslant -k_2(t)(y(t) - y_*)^2, \qquad \alpha_1 (y(t) - y_*)^2 \leqslant -v'(t),$$
$$\alpha_1 \int_0^{+\infty} (y(t) - y_*)^2 dt \leqslant v(0) - v_\infty,$$
$$\int_0^{+\infty} (y(t) - y_*)^2 dt < \infty. \tag{8}$$

Подынтегральная функция $\varphi(t) = (y(t) - y_*)^2$ ограничена вместе со своей производной на промежутке $[0, +\infty)$. Отсюда следует, что $\varphi(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Действительно, из (8) следует существование последовательности $s_n \to +\infty$, вдоль которой функция φ стремится к нулю. Предположим, что существует другая последовательность $t_n \to +\infty$, вдоль которой функция φ не стремится к нулю, т. е. $\varphi(t_n) > 2\sigma$, $n = 1, 2, \ldots$, где σ — фиксированное положительное число. При каждом $n = 1, 2, \ldots$ существует $\tau_n \in (t_n, s_{p_n})$ такое, что $\varphi(\tau_n) = \sigma$ и $\varphi(t) > \sigma$ при $t \in (t_n, \tau_n)$. Можно считать, что $\tau_n < t_{n+1}$. Оценим снизу длину отрезка $[t_n, \tau_n]$:

$$\tau_n - t_n \geqslant \int_{t_n}^{\tau_n} \frac{-\varphi'(t)}{M_{\varphi'}} dt = \frac{\varphi(t_n) - \varphi(\tau_n)}{M_{\varphi'}} > \frac{\sigma}{M_{\varphi'}}, \qquad \text{где} \qquad M_{\varphi'} = \sup_{s \geqslant 0} |\varphi'(s)|.$$

На основе этой оценки приходим к противоречию:

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt > \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_n}^{\tau_n} \varphi(t) dt \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(\tau_n - t_n) > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2}{M_{\varphi'}} = +\infty.$$

Таким образом, $y(t) \to y_*$ при $t \to +\infty$.

В равенстве (4), переходя к пределу при $t \to +\infty$, получим

$$B_1 \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{x(t)}{x_*} - \ln \frac{x(t)}{x_*} \right) = v_\infty.$$

Такое возможно лишь в том случае, когда $x(t) \to x_* \xi_*$ при $t \to +\infty$, где ξ_* — корень уравнения $\xi - \ln \xi = v_\infty / B_1$. Проверим, что $\xi_* = 1$. Для этого возьмем последовательность $t_n \to +\infty$, вдоль которой $y'(t)$ стремится к нулю, и во втором уравнении системы (6) перейдем к пределу вдоль этой последовательности. В результате получаем $(y_*/x_*) x_* \xi_* - y_* = 0$, откуда следует $\xi_* = 1$. Теорема 2 доказана.

Проверим справедливость следствия 2. Любое решение автономной системы (2) с положительными начальными значениями, согласно следствию 1, определено, положительно и ограничено на промежутке $[0, +\infty)$. Другими словами, траектория решения остается в первой четверти координатной плоскости Oxy и ограничена. Такая траектория в силу теоремы 2 приближается к точке (x_0, y_0) при неограниченном возрастании времени. Если к тому же траектория ограничена при убывании времени и остается в первой четверти, отделяясь от нуля, то согласно общей теории автономных систем на плоскости [9, с. 226] множество ее α-предельных точек состоит из предельных циклов и стационарных точек, лежащих в первой четверти. У автономной системы (2) в первой четверти имеется лишь одна стационарная точка, а предельных циклов не может быть, так как они при неограниченном возрастании времени не могут приближаться к стационарной точке (x_0, y_0). Следовательно, стационарная точка (x_0, y_0) является единственной траекторией автономной системы (2), лежащей в первой четверти, отделенной от нуля и ограниченной при возрастании и убывании времени.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

В силу условий г), д), е) и следствия 1 любое положительное решение $(x(t), y(t))$ системы уравнений (1) определено и ограничено на промежутке $[0, +\infty)$. Покажем, что $(x(t), y(t)) \to (x_\infty, y_\infty)$ при $t \to +\infty$. Сперва предположим, что выполнено условие

$$\inf_{t\geqslant 0} x(t) > 0. \tag{9}$$

Возьмем произвольную возрастающую последовательность $t_n \to +\infty$ и рассмотрим последовательности функций

$$x_n(t) = x(t + t_n), \qquad y_n(t) = y(t + t_n), \qquad t \in [-t_n, +\infty), \quad n = 1, 2, \ldots \quad .$$

При каждом $n = 1, 2, \ldots$ для $(x_n(t), y_n(t))$ имеем

$$\begin{cases} x_n'(t) = c(t + t_n)\,(Y(t + t_n) - y_n(t))\,x_n(t) - k_1(t + t_n)x_n(t), \\ y_n'(t) = a(t + t_n)\,(Y(t + t_n) - y_n(t))\,x_n(t) - k_2(t + t_n)y_n(t), \quad t \in (-t_n, +\infty). \end{cases} \tag{10}$$

Последовательность $\{(x_n(t), y_n(t))\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на каждом конечном отрезке $[\alpha, \beta] \subset (-\infty, +\infty)$. Без ограничения общности можно считать, что данная последовательность сходится к паре функций $(x_0(t), y_0(t))$ равномерно на каждом конечном отрезке из $(-\infty, +\infty)$. Тогда в силу (10) последовательность производных $\{(x_n'(t), y_n'(t))\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $(x_0'(t), y_0'(t))$ равномерно на каждом конечном отрезке. Для функций $x_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, согласно предположению (9), имеет место оценка

$$\inf_{t\geqslant -t_n} x_n(t) = \inf_{t\geqslant 0} x(t) > 0, \quad k = 1, 2, \ldots \quad .$$

В системе уравнений (10), переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $(x_0(t), y_0(t))$ является неотрицательным и ограниченным на промежутке $(-\infty, +\infty)$ решением системы уравнений

$$\begin{cases} \xi'(t) = c_\infty\,(Y_\infty - \eta(t))\,\xi(t) - k_{1,\infty}\xi(t), \\ \eta'(t) = a_\infty\,(Y_\infty - \eta(t))\,\xi(t) - k_{2,\infty}\eta(t), \end{cases} \tag{11}$$

и для функции $x_0(t)$ имеет место оценка

$$\inf_{t\in(-\infty,+\infty)} x_0(t) > 0.$$

Из последней оценки в силу второго уравнения системы (11) и неотрицательности $y_0(t)$ следует, что $y_0(t) > 0$ при всех $t \in (-\infty, +\infty)$. К системе уравнений (11) и к решению $(x_0(t), y_0(t))$ этой системы применяя следствие 2, выводим, что $x_0(t) \equiv x_\infty$, $y_0(t) \equiv y_\infty$. Следовательно, $(x(t_n), y(t_n)) \to (x_\infty, y_\infty)$ при $n \to \infty$.

Доказательство теоремы 3 завершим следующей леммой.

Лемма 1. *Если выполнены условия г), д) и е), то любое положительное и ограниченное решение $(x(t), y(t))$, $t \in [0, +\infty)$ системы уравнений (1) удовлетворяет условию (9).*

Доказательство. Предположим, что условие (9) нарушено для какого-нибудь положительного и ограниченного решения $(x(t), y(t))$, $t \in [0, +\infty)$ системы уравнений (1). Тогда существует последовательность $\tau_n \to +\infty$ такая, что

$$\min_{0\leqslant t\leqslant \tau_n} x(t) = x(\tau_n), \quad x'(\tau_n) \leqslant 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad x(\tau_n) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Из неравенства $x'(\tau_n) \leqslant 0$ в силу первого уравнения системы (1) следует, что $y(\tau_n) \geqslant Y(\tau_n) - k_1(\tau_n)/c(\tau_n)$ при $c(\tau_n) > 0$. Можно считать, что при всех $n = 1, 2, \ldots$ имеют место неравенства $x(\tau_n) < 1$ и $y(\tau_n) > r$, где $r = (Y_\infty - k_{1,\infty}/c_\infty)/2$.

При каждом $n = 1, 2, \ldots$ рассмотрим наибольший интервал (s_n, τ_n), где выполняются неравенства

$$x(t) < \sqrt{x(\tau_n)}, \quad y(t) > r, \quad t \in (s_n, \tau_n).$$

На этом интервале в силу второго уравнения системы (1) имеем

$$y'(t) < R\sqrt{x(\tau_n)} - k_2(t)y(t), \qquad \text{где} \qquad R > \sup_{t\geqslant 0} |a(t)(Y(t) - y(t))|.$$

В дальнейшем полагаем, что

$$R > \sup_{t\geqslant 0} |c(t)(Y(t) - y(t)) - k_1(t)|, \quad R > y(t).$$

Так как $x(\tau_n) \to 0$ при $n \to \infty$ и $k_2(t) \to k_{2,\infty}$ при $t \to +\infty$, можно считать, что

$$R\sqrt{x(\tau_n)} - k_2(t)y(t) < -\sigma, \quad t \in (s_n, \tau_n),$$

где $\sigma > 0$ и зависит лишь от R, r и $k_{2,\infty}$. Таким образом, $y'(t) < -\sigma$ при $t \in (s_n, \tau_n)$. Отсюда следует, что $\tau_n - s_n \leqslant (R - r)/\sigma$ и $x(s_n) = \sqrt{x(\tau_n)}$. Теперь оценим снизу $x(\tau_n)$, воспользуясь первым уравнением системы (1):

$$x(\tau_n) = x(s_n)e^{\int_{s_n}^{\tau_n}[c(s)(Y(s)-y(s))-k_1(s)]ds} \geqslant \sqrt{x(\tau_n)}e^{-R(\tau_n - s_n)},$$
$$\sqrt{x(\tau_n)} \geqslant e^{-R(R-r)/\sigma}.$$

Полученная оценка противоречит тому, что $x(\tau_n) \to 0$ при $n \to \infty$. $\square$

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты № 18-47-350001 р-а, № 19-01-00103а).

Библиографический список

1. *Горский А. А., Локшин Б. Я., Розов Н. Х.* Режим обострения в одной системе нелинейных уравнений // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 11. С. 1571–1581.
2. *Горский А. А., Локшин Б. Я.* Математическая модель производства и продажи для управления и планирования производства // Фундамент. и прикл. матем. 2002. Т. 8, вып. 1. С. 39–45.
3. *Мухамадиев Э., Наимов А. Н., Собиров М. К.* Исследование положительных решений динамической модели производства и продажи товара // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий : сб. тр. X междунар. конф. («ПМТУКТ-2017»). Воронеж : Научная книга, 2017. С. 268–271.
4. *Кобилзода М. М., Наимов А. Н.* О положительных и периодических решениях одного класса систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости // Вестн. ВГУ. Сер. Физика. Математика. 2019. № 1. С. 117–127.
5. *Плисс В. А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. М. : Наука, 1964. 367 с.
6. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М. : Наука, 1975. 511 с.
7. *Мухамадиев Э.* К теории ограниченных решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 4. С. 635–646.
8. *Мухамадиев Э.* Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений // Матем. заметки. 1981. Т. 30, вып. 3. С. 443–460.
9. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. : Мир, 1970. 720 с.

Образец для цитирования:

Кобилзода М. М., Наимов А. Н. О положительных решениях модельной системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 2. С. 161–171. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-161-171

On the Positive Solutions of a Model System of Nonlinear Ordinary Differential Equations

M. M. Kobilzoda, A. N. Naimov

MirzoOdil M. Kobilzoda, Tajik National University, 17 Rudaki Ave., Dushanbe 734025, Republic of Tajikistan, kobilzoda94@mail.ru

Alizhon N. Naimov, https://orcid.org/0000-0002-6194-7164, Vologda State University, 15 Lenin St., Vologda 160000, Russia, nan67@rambler.ru

This article investigates the properties of positive solutions of a model system of two nonlinear ordinary differential equations with variable coefficients. We found the new conditions on coefficients for which an arbitrary solution $(x(t), y(t))$ with positive initial values $x(0)$ and $y(0)$ is positive, nonlocally continued and bounded at $t > 0$. For this conditions we investigated the question of global stability of positive solutions via method of constructing the guiding function and the method of limit equations. Via the method of constructing the guide function we proved that if the system of equations has a positive constant solution (x_*, y_*), then any positive solution $(x(t), y(t))$ at $t \to +\infty$ approaches (x_*, y_*). And in the case when the coefficients of the system of equations have finite limits at $t \to +\infty$ and the limit system of equations has a positive constant solution (x_∞, y_∞), via method of limit equations we proved that any positive solution $(x(t), y(t))$ at $t \to +\infty$ approaches (x_∞, y_∞). The results obtained can be generalized for the multidimensional analog of the investigated system of equations.

Keywords: a model system of nonlinear ordinary differential equations, positive solution, nonlocal continuation, global stability of positive solutions, method of constructing the guiding function, method of limit equations.

Received: 17.06.2019 / Accepted: 30.09.2019 / Published: 01.06.2020

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects No. 18-47-350001 p-a, No. 19-01-00103a).

References

1. Gorsky A. A., Lokshin B. Y., Rozov N. Kh. The regime intensified in one system of nonlinear equations. *Differential Equations*, 1999, vol. 35, no. 11, p. 1571–1581 (in Russian).
2. Gorsky A. A., Lokshin B. Y. A mathematical model of goods production and sale for production supervision and planning. *Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika*, 2002, vol. 8, no. 1, pp. 39–45 (in Russian).
3. Mukhamadiev E., Naimov A. N., Sobirov M. K. Research positive solutions of dynamic model of production and sale goods. *Sovremennye metody prikladnoi matematiki, teorii upravleniya i komp'yuternykh tekhnologii : sbornik trudov X mezhdunarodnoi konferentsii ("PMTUKT-2017")* [Modern methods of applied mathematics, control theory and computer technology: proceedings of X Int. Conf. ("PMTUKT-2017")]. Voronezh, Nauchnaia kniga, 2017, pp. 268–271 (in Russian).
4. Kobilzoda M. M., Naimov A. N. On positive and periodic solutions of one class of systems of nonlinear ordinary differential equations on a plane . *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Fizika. Matematika* [Proccedings of Voronezh State University. Ser. Physics. Mathematics], 2019, no. 1, pp. 117–127 (in Russian).
5. Pliss V. A. *Nonlocal problems of the theory of oscillations*. New York, London, Acad. Press, 1966. 306 p. (Rus. ed.: Moscow, Nauka, 1964. 367 p.).
6. Krasnosel'skii M. A., Zabreiko P. П. *Geometrical Methods of Nonlinear Analysis*. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, Springer Verlag, 1984. 409 p.
7. Mukhamadiev E. On the theory of bounded solutions of ordinary differential equations. *Differ. Uravn.*, 1974, vol. 10, no. 4, pp. 635–646 (in Russian).
8. Mukhamadiev E. Research on the theory of periodic and bounded solutions of differential equations. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1981, vol. 30, no. 3, pp. 713–722. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01141630
9. Hartman P. *Ordinary Differential Equations*. New York, John Wiley and Sons, 1964. 612 p. (Rus. ed.: Moscow, Mir, 1970. 720 p.).

Cite this article as:

Kobilzoda M. M., Naimov A. N. On the Positive Solutions of a Model System of Nonlinear Ordinary Differential Equations. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 2, pp. 161–171 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-161-171